

Cours 23 – 05/12/2024



10. La dynamique du solide indéformable

10.2. Moment cinétique et moment d'inertie

10.3. Calcul d'un moment d'inertie

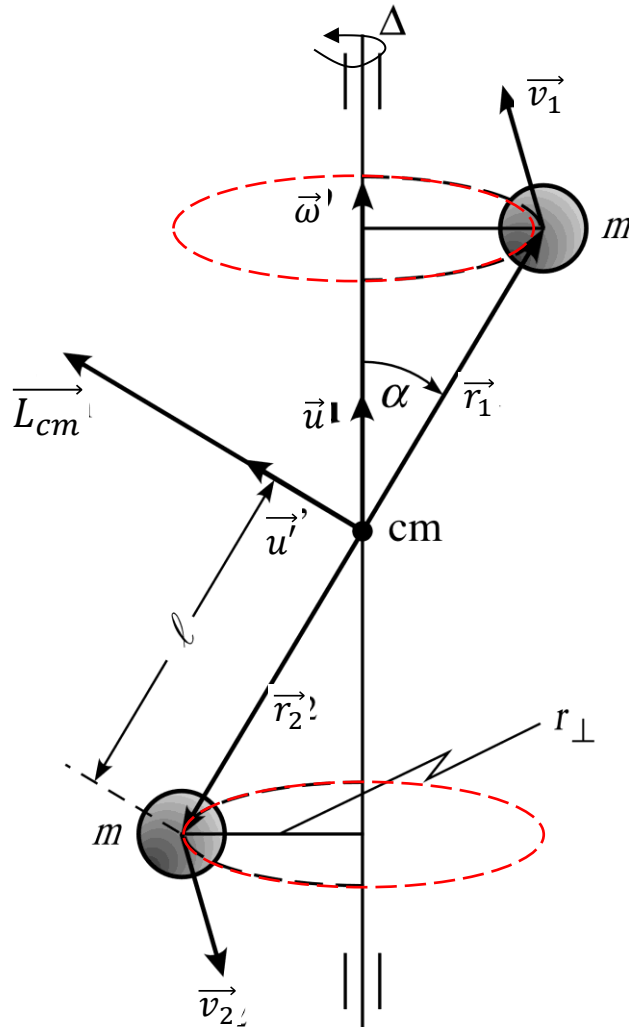
10.4. Calcul d'un moment d'inertie composé

$$E_{cin} = \frac{1}{2} I_{cm,\Delta} \omega^2$$

10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



■ Cas particulier : moment cinétique pour un haltère en position oblique



Nous considérons la rotation d'un haltère incliné d'un angle α par rapport à l'axe de rotation Δ qui passe par le cm.

Le moment cinétique total est

$$\vec{L}_{cm} = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

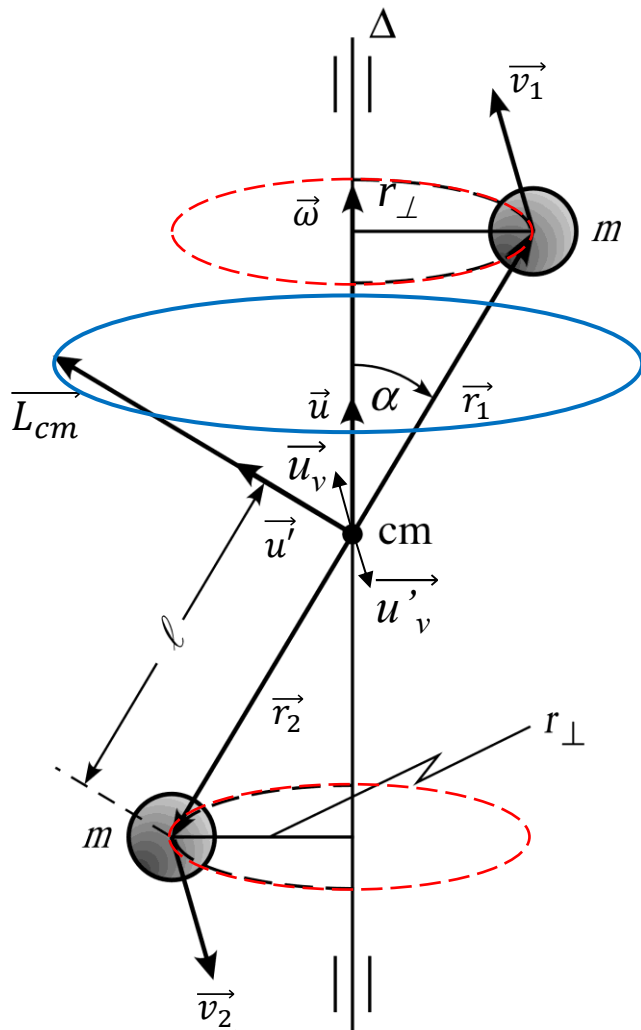
Remarque :

- les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont dans le plan de rotation des masses
- on note $r_{\perp}$ la distance des masses à l'axe de rotation

10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



■ Cas particulier : moment cinétique pour un haltère en position oblique



Moment cinétique par rapport au cm :
$$\begin{aligned}\vec{L}_{cm} &= \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_1) + \\ &\quad + \vec{r}_2 \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}_2)\end{aligned}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_1 = \omega l \sin \alpha \vec{u}_v \quad \text{avec } \sin \alpha = r_\perp / l \quad \text{d'où } \vec{\omega} \times \vec{r}_1 = \omega r_\perp \vec{u}_v$$

$$\vec{r}_1 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) = \vec{r}_1 \times \omega r_\perp \vec{u}_v = l \omega r_\perp \vec{u}'$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_2 = \omega l \sin(\pi - \alpha) \vec{u}'_v = -\omega l \sin(\pi - \alpha) \vec{u}_v = -\omega r_\perp \vec{u}_v$$

$$\vec{r}_2 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_2) = -\vec{r}_2 \times \omega r_\perp \vec{u}_v = l \omega r_\perp \vec{u}'$$

Finalement :
$$\vec{L}_{cm} = 2 m l \omega r_\perp \vec{u}'$$

Le vecteur unitaire $\vec{u}'$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{r}_{1,2}$ et $\vec{v}_{1,2}$, c'est-à-dire perpendiculaire à l'haltère et dans le plan formé par Δ et l'haltère.

$\vec{L}_{cm}$ a un mouvement de précession avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$

Le moment cinétique d'un solide n'est pas toujours colinéaire à $\vec{\omega}$

10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



■ Cas général : moment cinétique d'un solide

Quantité de mouvement du volume élémentaire dV :

$$d\vec{p} = \vec{v}dm = \vec{v}\rho dV$$

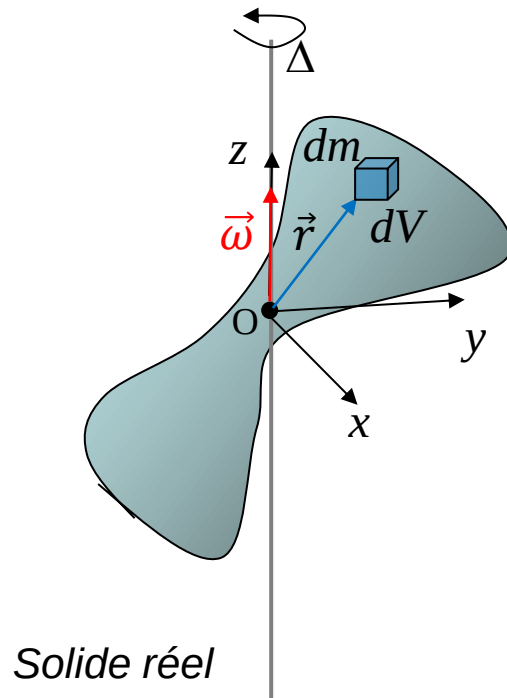
Moment cinétique élémentaire pour l'élément de masse dm :

$$d\vec{L}_O = \vec{r}_O \times d\vec{p} = \vec{r}_O \times \vec{v}\rho dV$$

Moment cinétique total du solide:

$$\vec{L}_O = \int_V d\vec{L}_O = \int_V \vec{r}_O \times \vec{v}\rho dV$$

rem: $\vec{v}, \rho$, et dV dépendent de $\vec{r}_O$



Le moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe passant par son centre de masse est un vecteur qui "tourne" (mouvement de précession) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ mais qui n'est pas forcément colinéaire à $\vec{\omega}$.

10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



■ Projection du moment cinétique sur l'axe de rotation

Le moment cinétique dépend de la distribution des masses du solide par rapport à l'axe de rotation. On appelle $r_{\perp}$ la distance des masses à l'axe de rotation. Le moment cinétique s'écrit alors :

$$\vec{L}_{cm} = 2 m l \omega r_{\perp} \vec{u}'$$

Projection de $\vec{L}_{cm}$ sur l'axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\begin{aligned} L_{cm,\Delta} &= \vec{L}_{cm} \cdot \vec{u} \\ &= 2m\omega r_{\perp} \underbrace{\ell \vec{u}' \cdot \vec{u}}_{\substack{\sin \alpha \\ r_{\perp}}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos(\pi/2 - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin \alpha &= r_{\perp} / l \end{aligned}$$

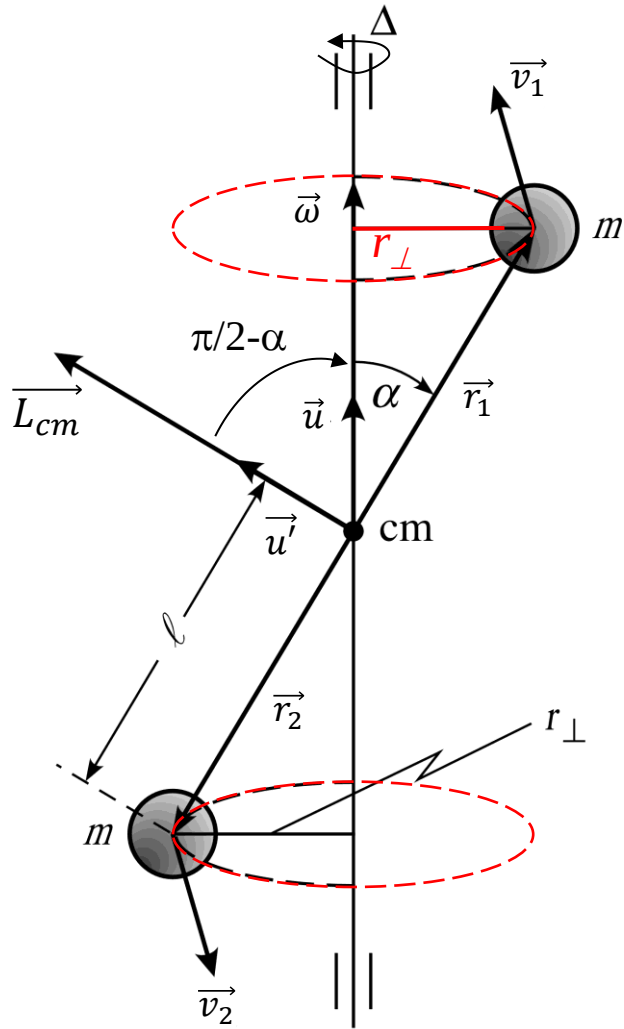
$$L_{cm,\Delta} = 2m r_{\perp}^2 \omega$$

Vitesse angulaire
pour la rotation
autour de l'axe Δ

Masse totale de
l'haltère

Distance des masses
par rapport à l'axe Δ

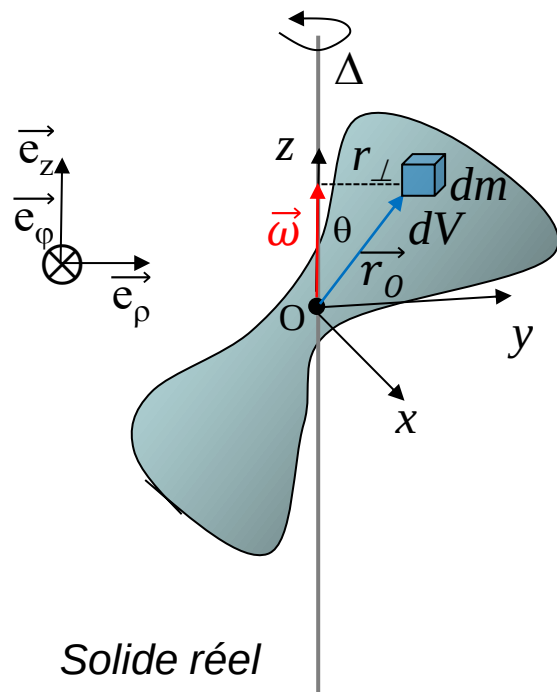
Remarque : si $\vec{u}'$ est $\perp$ à $\vec{\omega}$ alors la projection de $\vec{L}_{cm}$ est nulle



10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



■ Cas général : moment cinétique projeté sur l'axe de rotation



On peut généraliser

$$d\vec{L}_O = \vec{r}_0 \times d\vec{p} = \vec{r}_0 \times \vec{v} dm \quad \text{avec } \|\vec{r}_0\| = r$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_0 = r \sin \theta \omega \vec{e}_\phi = \omega r_\perp \vec{e}_\phi \quad (\text{coordonnées cylindriques } \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$$

$$d\vec{L}_O = \vec{r}_0 \times (\omega r_\perp \vec{e}_\phi) dm = (r \sin \theta \vec{e}_\rho + r \cos \theta \vec{e}_z) \times \vec{e}_\phi \omega r_\perp dm$$

$$d\vec{L}_O = (r_\perp \vec{e}_\rho + r \cos \theta \vec{e}_z) \times \vec{e}_\phi \omega r_\perp dm = (r_\perp \vec{e}_z - r \cos \theta \vec{e}_\rho) \omega r_\perp dm$$

On projette sur l'axe Oz

$$d\vec{L}_O \cdot \vec{e}_z = dL_O^z = (r_\perp \vec{e}_z - r \cos \theta \vec{e}_\rho) \cdot \vec{e}_z \omega r_\perp dm = r_\perp^2 \omega dm$$

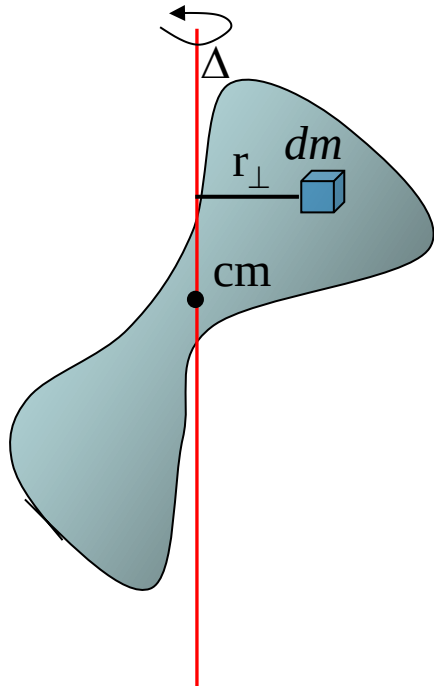
On intègre sur le volume

$$L_O^z = \int_V dL_O^z = \int_V r_\perp^2 \omega dm = \int_V r_\perp^2 \omega \rho dV$$

10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



■ Définition du moment d'inertie



Généralisation : pour un solide, la projection du moment cinétique $\vec{L}_{cm}$ sur un axe de rotation Δ passant par son centre de masse s'écrit

$$L_{cm,\Delta} = \omega \int_V r_{\perp}^2 dm$$

$r_{\perp}$ est la distance entre l'élément de volume (de masse dm) considéré et l'axe de rotation (on pourra remplacer $r_{\perp}$ par r pour simplifier l'écriture, mais attention à la définition : c'est la distance la plus petite entre l'élément de volume et l'axe de rotation).

$r_{\perp}$ est constant au cours de la rotation car le solide est indéformable

On définit alors

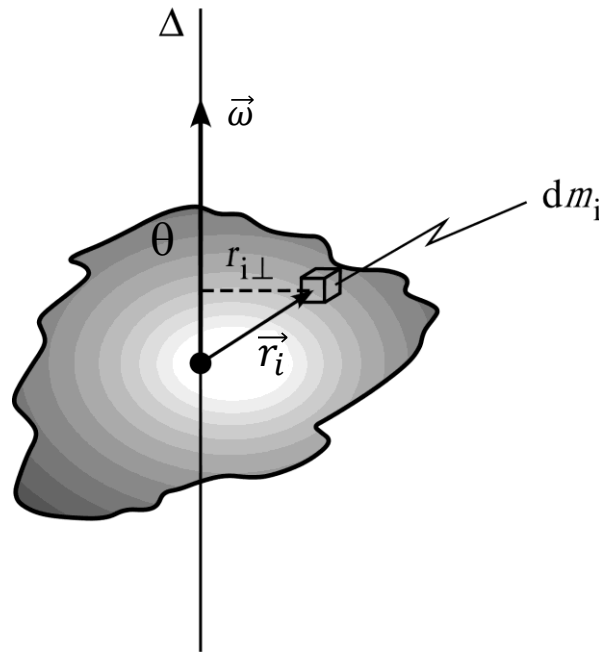
$$I_{cm,\Delta} = \int_V r_{\perp}^2 dm$$

$I_{cm,\Delta}$ est appelé **moment d'inertie** d'un solide pour une rotation par rapport à l'axe Δ

10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



■ Energie cinétique de rotation et moment d'inertie



Elément dm_i

$$\begin{aligned}dE_{cin} &= \frac{1}{2}dmv_i^2 \\&= \frac{1}{2}dm |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 \\&= \frac{1}{2}dmr_{i\perp}^2\omega^2\end{aligned}$$

Solide entier

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\omega^2 \int_V r_{\perp}^2 dm$$

Energie cinétique de rotation :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}I_{cm,\Delta}\omega^2$$

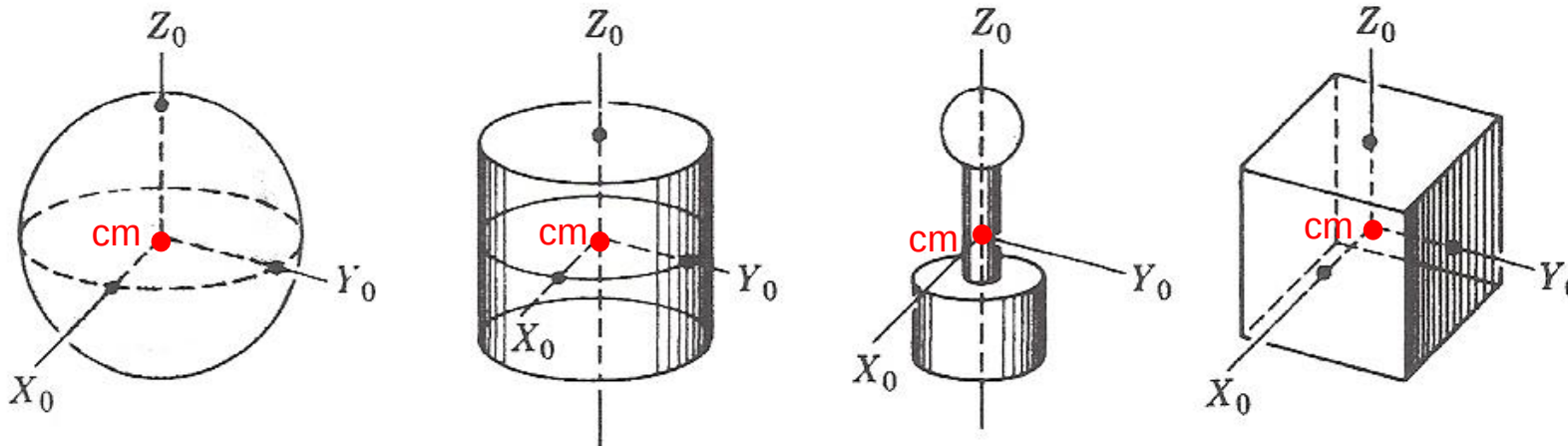
10.2. Moment cinétique et moment d'inertie



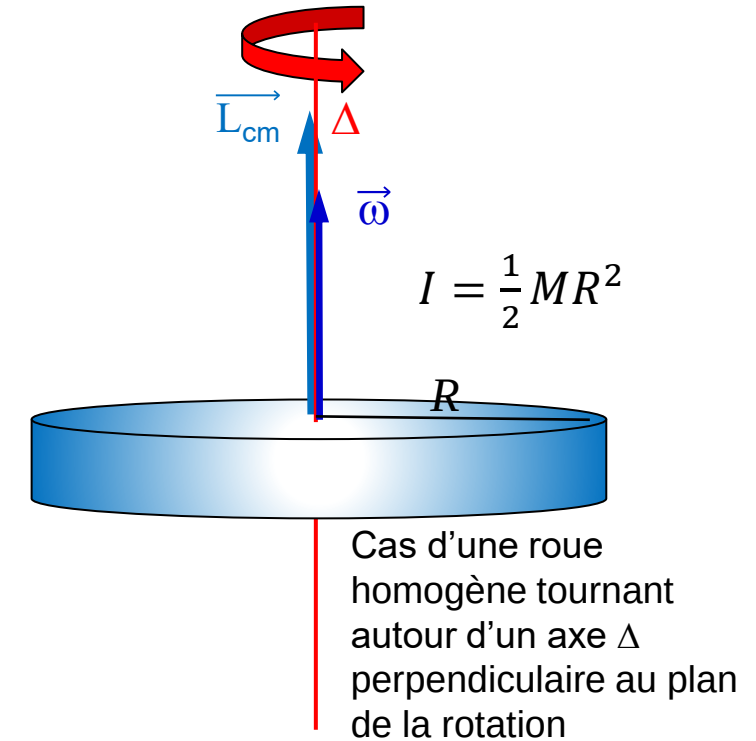
■ Axe principal d'inertie

De façon générale, le moment cinétique $\vec{L}$ n'est pas parallèle à l'axe de rotation, c'est-à-dire colinéaire à $\vec{\omega}$. Cependant, on peut montrer que pour un solide, et ce quelle que soit sa forme, il y a (au moins) trois directions orthogonales passant par le centre de masse pour lesquelles le moment cinétique est parallèle à l'axe de rotation : **ce sont les axes principaux d'inertie**.

Dans ce cas, on peut écrire $\vec{L} = I \vec{\omega}$



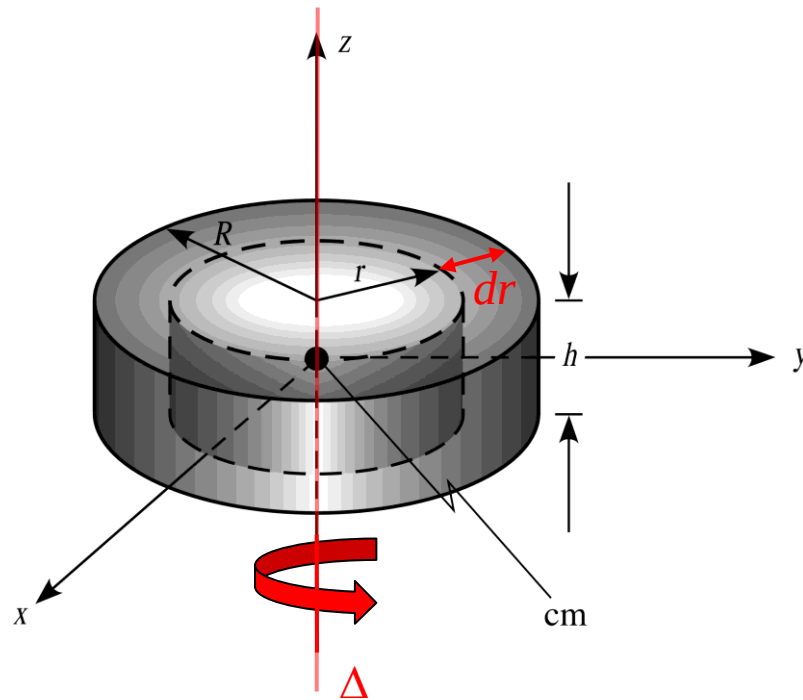
Exemples d'axes principaux d'inerties (X_0, Y_0, Z_0) pour différents solides



10.3. Calcul d'un moment d'inertie



■ Exemple d'une roue pleine : moment d'inertie pour une rotation selon Oz



Comment calcule-t-on I_z ?

$$I_z = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV$$

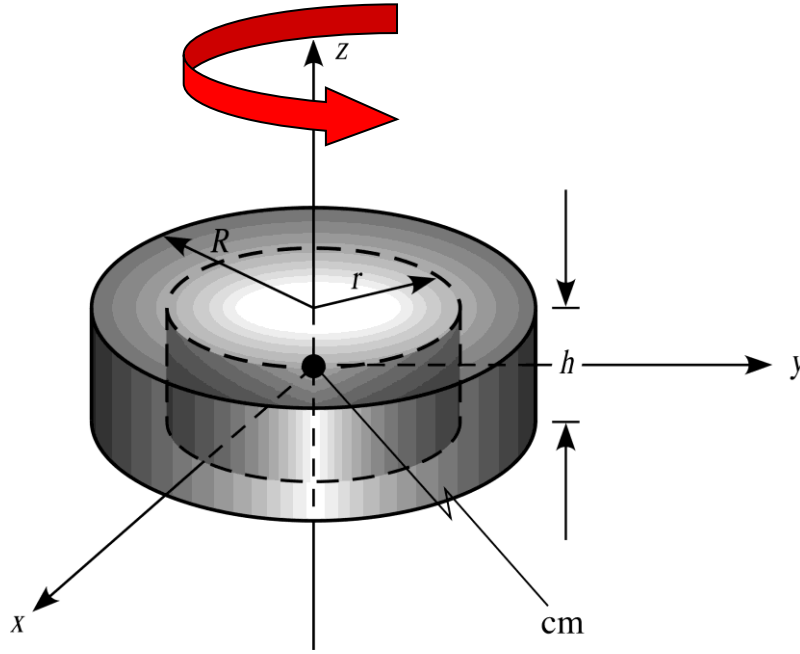
Comme seule la distance par rapport à l'axe Δ intervient ($r_{\perp}$), on choisit un élément de volume dV tel que tous les points dans ce volume soient à une **distance constante** de l'axe Δ pendant la rotation.

$\Rightarrow$ un anneau de rayon r , d'épaisseur dr et de hauteur h satisfait cette condition. On peut donc définir le volume correspondant qui est : $dV = 2\pi r dr h$

10.3. Calcul d'un moment d'inertie



■ Exemple d'une roue pleine : moment d'inertie pour une rotation selon Oz



$$I_z = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV \quad \text{avec} \quad dV = 2\pi r h dr$$

Par définition, $r_{\perp}$ est la distance entre dV et l'axe. Tel que r est défini dans la figure ci-contre, $r_{\perp} = r$, soit

$$\begin{aligned} I_z &= \rho \int_0^R r^2 \overbrace{2\pi r dr h}^{dV} = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr \\ &= \rho \pi h \frac{1}{2} R^4 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Le volume du cylindre est } V = \pi R^2 h \\ \text{La masse du cylindre est } M = V\rho \end{array} \right\} M = V\rho = \pi R^2 h \rho$$

Finalement le moment d'inertie selon Oz s'écrit

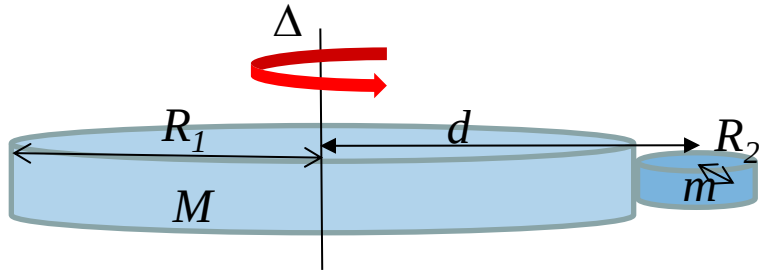
$$I_z = \frac{1}{2} M R^2$$

10.4. Calcul d'un moment d'inertie composé



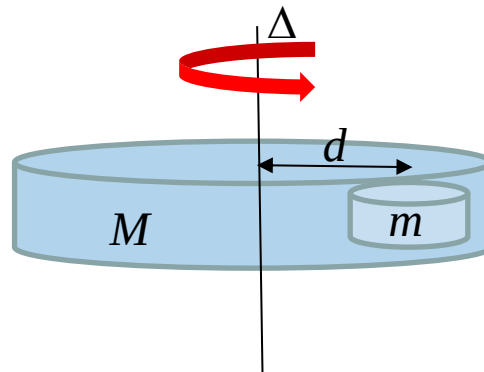
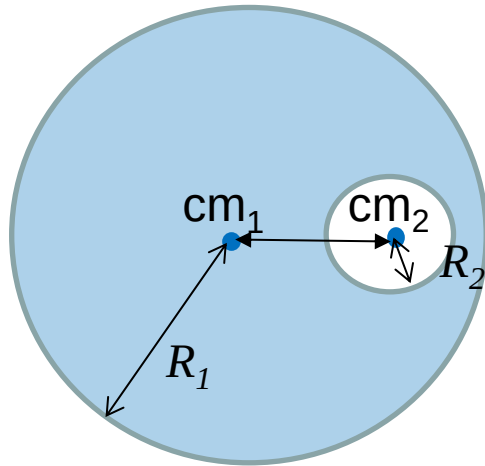
■ Moment d'inertie composé : exemples

A) Le moment d'inertie d'un objet formé de deux roues



$$I_{total} = I_{grande\ roue} + I_{petite\ roue}$$

B) Le moment d'inertie d'une roue trouée



Cette roue peut être vue comme la somme de la roue trouée et du petit disque de masse m et de rayon R_2

$$I_{roue\ pleine} = I_{roue\ trouée} + I_{petite\ roue}$$

$$\Rightarrow I_{roue\ trouée} = I_{roue\ pleine} - I_{petite\ roue}$$

Attention : dans ces deux exemples, le moment d'inertie de la petite roue ne correspond pas au moment d'inertie pour une rotation passant par le centre de masse